Notes sur quelques représentations tensorielles du groupe $SO(3)$

Christian Carimalo

1 Représentation vectorielle [1]

Le groupe $SO(3)$ est avant tout celui des rotations autour d'un point fixe dans l'espace réel à trois dimensions, dont la toute première représentation est fournie par les vecteurs de cet espace. Considérons donc un vecteur unitaire (réel) $\boldsymbol{u}$ subissant une rotation infinitésimale le transformant en $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{du}$. Par définition, une rotation ne change pas la norme des vecteurs. Au premier ordre en $||\boldsymbol{du}||$, on a donc

$$
\begin{aligned}
||\boldsymbol{u}'||^2 = 1 = ||\boldsymbol{u}||^2 + 2\boldsymbol{du}\cdot\boldsymbol{u} = 1 + 2\boldsymbol{du}\cdot\boldsymbol{u}, \quad \text{d'où} \\
\boldsymbol{du}\cdot\boldsymbol{u} = 0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Posons $d\theta = ||\boldsymbol{du}||$ et définissons le vecteur unitaire $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{du}/d\theta$. D'après (1.1) les deux vecteurs unitaires $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont orthogonaux et le vecteur $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}$ est lui aussi unitaire et est orthogonal au plan formé par $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$. Le triplet $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ forme une base orthonormée d'orientation directe et l'on a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}\wedge\boldsymbol{u}$, ce qui permet d'écrire

$$
\boldsymbol{du} = d\theta\, \boldsymbol{w}\wedge\boldsymbol{u} \tag{1.2}
$$

Le vecteur $\boldsymbol{w}$ définit l'axe autour duquel est effectuée la rotation d'angle infinitésimal $d\theta$. Explicitons les composantes de (1.2) :

$$
[\boldsymbol{du}]_i = d\theta\, \epsilon_{ijk}\, w_j\, u_k = d\Omega_j\, [L_j(\boldsymbol{u})]_i \tag{1.3}
$$

où l'on a défini $d\Omega_j = d\theta\, w_j$ et

$$
[L_j(\boldsymbol{u})]_i = -\epsilon_{jik}\, u_k \tag{1.4}
$$

La grandeur ϵ_{ijk} est un tenseur de Levi-Civita, complètement antisymétrique suivant ses trois indices et tel que $\epsilon_{123} = 1$. Nous utilisons ici la convention de sommation sur les indices répétés (convention d'Einstein). Les trois grandeurs L_i apparaissant dans (1.4) sont trois opérateurs linéaires agissant sur les vecteurs. Ce sont les composantes cartésiennes d'un opérateur-vecteur $\boldsymbol{L}$ appelé moment angulaire ou encore “spin”. C'est cet opérateur qui génére les rotations. Ses composantes sont les trois générateurs du groupe $SO(3)$ pour la représentation vectorielle de celui-ci. La relation (1.3) montre que ce groupe est à trois paramètres, qui sont l'angle de rotation, ici $d\theta$, et deux paramètres définissant l'orientation du vecteur unitaire $\boldsymbol{w}$. Ces paramètres pouvant être variés continuement, $SO(3)$ est un groupe continu. On montre que, par exponentiation de la formule (1.3), une rotation d'angle θ fini autour de l'axe défini par $\boldsymbol{w}$ a pour expression

1. Nous utiliserons des lettres en gras pour représenter les vecteurs à trois composantes.

$$R(\boldsymbol{w};\theta) = \exp\left[\theta\, \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{L}\right] \tag{1.5}$$

Les trois opérateurs L_i définissent l'algèbre de Lie du groupe. Cette algèbre est caractérisée par les relations de commutation entre les L_i établies ci-après. On a

$$\left[L_a(L_b(\boldsymbol{u}))\right]_i = -\epsilon_{aij}\left[L_b(\boldsymbol{u})\right]_j = \epsilon_{aij}\epsilon_{bjk}u_k$$

Or, $\epsilon_{aij}\epsilon_{bjk} = -\epsilon_{aij}\epsilon_{bkj} = -\delta_{ab}\delta_{ik} + \delta_{ak}\delta_{bi}$, d'où

$$\left[\{L_aL_b - L_bL_a\}(\boldsymbol{u})\right]_i = \left(\delta_{ak}\delta_{bi} - \delta_{a_i}\delta_{bk}\right)u_k = -\epsilon_{abc}\epsilon_{cik}u_k = \epsilon_{abc}\left[L_c(\boldsymbol{u})\right]_i$$

Comme cette relation est vraie pour tout $\boldsymbol{u}$, il vient

$$\boxed{\boxed{\,[\,L_a, L_b\,] = L_aL_b - L_bL_a = \epsilon_{abc}L_c\,}} \tag{1.6}$$

$$\text{soit}\quad [\,L_1, L_2\,] = L_3,\quad [\,L_2, L_3\,] = L_1,\quad [\,L_3, L_1\,] = L_2$$

C'est cette relation (1.6) qui définit entièrement l'algèbre de Lie du groupe $SO(3)$, qui est homomorphe à l'algèbre de Lie du groupe $SU(2)$.

Ci-après, nous donnons des représentations matricielles des L_i :

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Une représentation *irréductible* d'un groupe est telle qu'il n'existe aucun sous-espace invariant par le groupe, autre que l'espace de représentation tout entier et le vecteur nul correspondant. La représentation vectorielle étudiée ici est irréductible. Chaque représentation irréductible de $SO(3)$ est caractérisée par une valeur particulière de l'opérateur de Casimir $\boldsymbol{L}^2 = L_aL_a$, que nous noterons $-L(L+1)$, L étant le spin associé à ladite représentation irréductible. On a ici

$$\left[L_aL_a(\boldsymbol{u})\right]_i = \epsilon_{aij}\epsilon_{ajk}u_k = -\epsilon_{aij}\epsilon_{akj} = -2\delta_{ik}u_k = -2u_i$$

La représentation vectorielle, irréductible, est donc associée à la valeur $L = 1$ du spin.

2 Tenseurs de rang deux

Les tenseurs de rang deux considérés ici sont des éléments de l'espace produit tensoriel $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ de dimension $3^2 = 9$, tel que

$$T = \sum_{a,b} T_{ab}\, \boldsymbol{e}_a \otimes \boldsymbol{e}_b$$

où les vecteurs $\boldsymbol{e}_a$ forment une base orthonormée fixe de $\mathbb{R}^3$ et où les T_{ab} sont les composantes cartésiennes du dit tenseur relativement à la base orthonormée $\{\boldsymbol{e}_a \otimes \boldsymbol{e}_b\}$ de $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$. Dans cette représentation tensorielle, les générateurs de $SO(3)$ sont

$$J_a = L_a \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes L_a \tag{2.1}$$

où $\mathbb{1}$ représente l'opérateur identité agissant sur $\mathbb{R}^3$. Il est facile de vérifier que les trois opérateurs (2.1) satisfont les relations de commutation (1.6). On a

$$\begin{gathered} \boldsymbol{J}^2 = J_a J_a = L_a L_a \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes L_a L_a + 2P = -4 + 2P, \quad \text{où} \\ P = L_a \otimes L_a \end{gathered} \tag{2.2}$$

Examinons l'action de P sur le tenseur $\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g}$ où $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{gathered} [P(\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g})]_{ij} = \epsilon_{aim}\epsilon_{ajn} f_m g_n = (\delta_{ij}\delta_{mn} - \delta_{in}\delta_{jm}) f_m g_n, \quad \text{soit} \\ P(\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g}) = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g} - \boldsymbol{g} \otimes \boldsymbol{f} \end{gathered} \tag{2.3}$$

et notamment

$$P(\mathbb{1}) = \sum_a P(\boldsymbol{e}_a \otimes \boldsymbol{e}_a) = 2(\mathbb{1}) \tag{2.4}$$

Le tenseur identité $\mathbb{1}$ est donc vecteur propre de P avec la valeur propre 2. Puis

$$\begin{gathered} P^2(\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g}) = P(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}\, \mathbb{1} - \boldsymbol{g} \otimes \boldsymbol{f}) = 2\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g} - [\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g} - \boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g}] \\ = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g} + \boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g}, \quad \text{puis} \\ P^3(\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g}) = P(\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g}\, \mathbb{1} + \boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g}) = 3\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{g} - \boldsymbol{g} \otimes \boldsymbol{f} \end{gathered}$$

On en tire

$$\left[P^3 - 2P^2 - P + 2\right] (\boldsymbol{f} \otimes \boldsymbol{g}) = 0$$

Comme $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ sont quelconques, P doit vérifier l'équation [2]

$$P^3 - 2P^2 - P + 2 = (P-2)(P-1)(P+1) = 0 \tag{2.5}$$

qui est en fait l'équation caractéristique de P. Cet opérateur a donc pour valeurs propres 2, 1 et -1, et en conséquence, les valeurs propres de l'opérateur $\boldsymbol{J}^2$ sont 0, -2 et -6. Ecrivant ces valeurs propres sous la forme $-J(J+1)$, elles correspondent respectivement aux spins 0, 1 et 2. Relativement au groupe $SO(3)$, l'espace des tenseurs de rang deux est donc réductible en une somme directe des trois représentations irréductibles $[0]$ (scalaire), $[1]$ (vectorielle) et $[2]$:

$$\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 = [0] \oplus [1] \oplus [2] \tag{2.6}$$

Notons Q_0, Q_1 et Q_2 les projecteurs associés à chacun de ces sous-espaces. Il est facile de montrer que [3]

$$Q_0 = \frac{1}{3}(P^2 - 1), \quad Q_1 = \frac{1}{2}(2-P)(P+1), \quad Q_2 = \frac{1}{6}(P-2)(P-1) \tag{2.7}$$

On a

$$Q_0(\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{g}) = \frac{1}{3}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}, \quad Q_1(\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{g}) = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{g} - \boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{f}\right]$$
$$Q_2(\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{g}) = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{f}\otimes\boldsymbol{g} + \boldsymbol{g}\otimes\boldsymbol{f} - \frac{2}{3}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\right]$$

et, plus généralement pour un tenseur de rang deux quelconque T :

$$[Q_0(T)]_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\,\mathrm{tr}\,T = S_{ij}, \quad [Q_1(T)]_{ij} = \frac{1}{2}\left[T_{ij} - T_{ji}\right] = A_{ij}$$
$$[Q_2(T)]_{ij} = \frac{1}{2}\left[T_{ij} + T_{ji} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\,\mathrm{tr}T\right] = D_{ij} \tag{2.8}$$

On retrouve ici la décomposition bien connue d'un tenseur de rang deux en une somme d'un tenseur scalaire S, d'un tenseur antisymétrique A et d'un tenseur symétrique de trace nulle D. Le tenseur antisymétrique A a seulement $(3^2-3)/2 = 3$ composates a priori non nulles, tandis que le tenseur D a $(3^2-3)/2+3-1 = 5$ composantes a priori non nulles. Il n'y a donc qu'un seul tenseur scalaire, puisque $3^2 - 3 - 5 = 1$. Les trois composantes du tenseur antisymétriques permettent de définir un vecteur $\boldsymbol{V}$ au moyen de la formule

2. On remplace $\mathbb{1}$ par 1.
3. Vérifier que $Q_0 + Q_1 + Q_2 = 1$, $Q_J^2 = Q_j$ et $Q_J Q_{J'} = 0$ si $J \neq J'$.

$$A_{ij} = \epsilon_{ijk} V_k, \quad \text{ou} \quad V_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} A_{jk} \tag{2.9}$$

Faisons les remarques suivantes.

i) On observera que la dimension d'une représentation $[J]$ est $2J + 1$. C'est un résultat général.

ii) La représentation de $SO(3)$ dans $\mathbb{R}^3$ est une représentation irréductible $[1]$ de spin 1. Nous venons de voir que le produit tensoriel $[1] \otimes [1]$ est réductible selon la formule

$$[1] \otimes [1] = [0] \oplus [1] \oplus [2] \tag{2.10}$$

Comme le montre la formule (2.1), faire le produit tensoriel d'une représentation $[1]$ avec une autre représentation $[1]$ équivaut à additionner deux moment angulaires de spins $J = 1$ et $J' = 1$. Le résultat ne donne pas une représentation de spin $J + J' = 2$, mais une somme de représentations irréductibles dont le spin j va de $|J - J'|$ (ici 0) à $J + J'$ (ici 2). C'est aussi un résultat général que nous utiliserons dans la suite.

iii) Rappelons que lors d'une transformation R, les composantes d'un vecteur $\boldsymbol{V}$ de $\mathbb{R}^3$ se transforment comme $V'_i = R_{ij} V_j$ et la norme de ce vecteur comme $V'_i V'_i = R_{ij} R_{ik} V_j V_k = ({}^tR)_{ji} R_{ik} V_j V_k = ({}^tRR)_{jk} V_j V_k$. Cette norme n'est conservée pour tout $\boldsymbol{V}$ que si et seulement si $({}^tRR)_{jk} = \delta_{jk}$, c'est-à-dire, si R est une matrice *orthogonale*. Elle vérifie alors ${}^tR = R^{-1}$ et $\det({}^tRR) = (\det{}^tR)(\det R) = (\det R)^2 = 1$. Si de plus $\det R = +1$, R est une rotation. Dans une rotation, les composantes d'un tenseur T de rang deux se transforment comme $T'_{ij} = R_{ir} R_{js} T_{rs}$, et l'on a $\mathrm{tr}\, T' = T'ii = R_{ir} R_{is} T_{rs} = ({}^tR)_{ri} R_{is} T_{rs} = ({}^tRR)_{rs} T_{rs} = T_{rr} = \mathrm{tr}\, T$. La trace d'un tenseurs de rang deux se conserve donc par rotation. D'après (2.8), c'est d'ailleurs le seul invariant attaché à ce tenseur.

3 Tenseurs de rang trois

Nous considérons maintenant les éléments de $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$, espace de dimension 27, c'est-à-dire, des grandeurs de la forme

$$T = \sum_{abc} T_{abc}\, \boldsymbol{e}_a \otimes \boldsymbol{e}_b \otimes \boldsymbol{e}_c$$

Etablissons tout d'abord la réduction de cette représentation et représentations irréductibles de $SO(3)$. On peut écrire

$$[1]\otimes[1]\otimes[1] = ([1]\otimes[1])\otimes[1] = ([0]\oplus[1]\oplus[2])\otimes[1] = [1]\oplus([1]\otimes[1])\oplus([2]\otimes[1])$$

$$\begin{aligned} & [1]\oplus([0]\oplus[1]\oplus[2])\oplus([1]\oplus[2]\oplus[3]) \\ & = [0]\oplus(3[1])\oplus(2[2])\oplus[3] \end{aligned} \tag{3.1}$$

La décomposition comporte donc : 1 représentation scalaire, 3 représentations vectorielles, 2 représentations de spin 2 et une représentation de spin 3. On notera dès à présent qu'il n'existe donc qu'un seul tenseur de rang trois invariant par rotation. Pour simplifier l'écriture et la lecture des formules, nous remplacerons le symbole $\otimes$ par / et $\oplus$ par $+$.

Le moment angulaire a ici pour composantes

$$J_a = L_a/\mathbb{1}/\mathbb{1} + \mathbb{1}/L_a/\mathbb{1} + \mathbb{1}/\mathbb{1}/L_a \tag{3.2}$$

et l'on a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}^2 &= -6 + 2P \quad \text{où} \\ P &= L_a/L_a/\mathbb{1} + L_a/\mathbb{1}/L_a + \mathbb{1}/L_a/L_a \end{aligned} \tag{3.3}$$

D'après (3.1), les valeurs propres de $\boldsymbol{J}^2$ sont 0 ($J=0$), -2 ($J=1$), - 6 ($J=2$) et -12 ($J=3$), correspondant aux valeurs propres de P égales respectivement à 3, 2, 0 et -3.

Examinons l'action de P sur le tenseur $\boldsymbol{f}/\boldsymbol{g}/\boldsymbol{h}$. On a

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{f}/\boldsymbol{g}/\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\,1/1/\boldsymbol{h} - \boldsymbol{g}/\boldsymbol{f}/\boldsymbol{h} + \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{h}\,1/\boldsymbol{g}/1 - \boldsymbol{h}/\boldsymbol{g}/\boldsymbol{f} \\ + \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{h}\,\boldsymbol{f}/1/1 - \boldsymbol{f}/\boldsymbol{h}/\boldsymbol{g} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dans cette formule, le symbole $1/1/\boldsymbol{h}$, par exemple, représente le produit tensoriel du tenseur identité $\mathbb{1}_{12}$ relatif aux deux premiers vecteurs du produit tensoriel $?/?/?$, avec le vecteur $\boldsymbol{h}$. Ses composantes sont $[1/1/\boldsymbol{h}]_{ijk} = \delta_{ij}h_k$; de même, $[1/\boldsymbol{g}/1]_{ijk} = \delta_{ik}g_j$. Calculons $P(1/\boldsymbol{h}/1)$. On a

$$(L_a/L_a/\mathbb{1})(1/\boldsymbol{h}/1)|_{ijk} = L_a(\boldsymbol{e}_b)/L_a(\boldsymbol{h})/\boldsymbol{e}_b|_{ijk} = \epsilon_{air}(e_b)_r\epsilon_{ajs}h_s(e_b)_k$$

$$= (\delta_{ij}\delta_{rs} - \delta_{is}\delta_{jr})h_s(e_b)_r(e_b)_k = \delta_{ij}h_k - \delta_{jk}h_i, \text{ car } (e_b)_r = \delta_{br},\ (e_b)_k = \delta_{bk}$$

donc

$$(L_a/L_a/\mathbb{1})(1/\boldsymbol{h}/1) = 1/1/\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}/1/1$$

On trouve de même

$$(L_a/\mathbb{1}/L_a)(1/\boldsymbol{h}/1) = 2(1/\boldsymbol{h}/1), \quad (\mathbb{1}/L_a/L_a)(1/\boldsymbol{h}/1) = -1/1/\boldsymbol{h} + 1/\boldsymbol{h}/1$$

D'où

$$P(1/\boldsymbol{h}/1) = 2(1/\boldsymbol{h}/1) \tag{3.5}$$

Du fait de la symétrie de P vis-à-vis de l'ordre selon lequel les produits tensoriels sont effectués, on trouve aussi bien

$$P(\boldsymbol{h}/1/1) = 2(\boldsymbol{h}/1/1), \quad P(1/1/\boldsymbol{h}) = 2(1/1/\boldsymbol{h}) \tag{3.6}$$

Puis, de

$$P\,[\,\boldsymbol{g}/\boldsymbol{f}/\boldsymbol{h} + \boldsymbol{h}/\boldsymbol{g}/\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}/\boldsymbol{h}/\boldsymbol{g}\,] = -3\,[\boldsymbol{f}/\boldsymbol{g}/\boldsymbol{h} + \boldsymbol{g}/\boldsymbol{h}/\boldsymbol{f} + \boldsymbol{h}/\boldsymbol{f}/\boldsymbol{g}]$$
$$+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\,[1/1/\boldsymbol{h} + 1/\boldsymbol{h}/1 + \boldsymbol{h}/1/1] + \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{h}\,[1/\boldsymbol{g}/1 + \boldsymbol{g}/1/1 + 1/1/\boldsymbol{g}]$$
$$+\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{h}\,[\boldsymbol{f}/1/1 + 1/\boldsymbol{f}/1 + 1/\boldsymbol{f}/1]$$

et

$$P\,[\,\boldsymbol{f}/\boldsymbol{g}/\boldsymbol{h} + \boldsymbol{h}/\boldsymbol{f}/\boldsymbol{g} + \boldsymbol{g}/\boldsymbol{h}/\boldsymbol{f}\,] = -3\,[\boldsymbol{g}/\boldsymbol{f}/\boldsymbol{h} + \boldsymbol{f}/\boldsymbol{h}/\boldsymbol{g} + \boldsymbol{h}/\boldsymbol{g}/\boldsymbol{f}]$$
$$+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\,[1/1/\boldsymbol{h} + 1/\boldsymbol{h}/1 + \boldsymbol{h}/1/1] + \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{h}\,[1/\boldsymbol{f}/1 + \boldsymbol{f}/1/1 + 1/1/\boldsymbol{f}]$$
$$+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{h}\,[\boldsymbol{g}/1/1 + 1/\boldsymbol{g}/1 + 1/\boldsymbol{g}/1]$$

on déduit successivement,

$$P^2(\boldsymbol{f}/\boldsymbol{g}/\boldsymbol{h}) = 3\,[\boldsymbol{f}/\boldsymbol{g}/\boldsymbol{h} + \boldsymbol{g}/\boldsymbol{h}/\boldsymbol{f} + \boldsymbol{h}/\boldsymbol{f}/\boldsymbol{g}]$$
$$+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\,[1/1/\boldsymbol{h} - 1/\boldsymbol{h}/1 - \boldsymbol{h}/1/1] + \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{h}\,[1/\boldsymbol{g}/1 - \boldsymbol{g}/1/1 - 1/1/\boldsymbol{g}]$$
$$+\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{h}\,[\boldsymbol{f}/1/1 - 1/1/\boldsymbol{f} - 1/\boldsymbol{f}/1]$$

$$P^3(\boldsymbol{f}/\boldsymbol{g}/\boldsymbol{h}) = -9\,[\boldsymbol{g}/\boldsymbol{f}/\boldsymbol{h} + \boldsymbol{h}/\boldsymbol{g}/\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}/\boldsymbol{h}/\boldsymbol{g}]$$
$$+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\,[5(1/1/\boldsymbol{h}) + 1/\boldsymbol{h}/1 + \boldsymbol{h}/1/1] + \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{h}\,[5(\boldsymbol{f}/1/1) + 1/\boldsymbol{f}/1 + 1/1/\boldsymbol{f}]$$
$$+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{h}\,[5(1/\boldsymbol{g}/1) + \boldsymbol{g}/1/1 + 1/\boldsymbol{g}/1]$$

$$P^4(\boldsymbol{f}/\boldsymbol{g}/\boldsymbol{h}) = 27\,[\boldsymbol{f}/\boldsymbol{g}/\boldsymbol{h} + \boldsymbol{g}/\boldsymbol{h}/\boldsymbol{f} + \boldsymbol{h}/\boldsymbol{f}/\boldsymbol{g}]$$
$$+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}\,[1/1/\boldsymbol{h} - 7(1/\boldsymbol{h}/1) - 7(\boldsymbol{h}/1/1)] + \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{h}\,[\boldsymbol{f}/1/1) - 7(1/\boldsymbol{f}/1) - 7(1/1/\boldsymbol{f})]$$
$$+\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{h}\,[1/\boldsymbol{g}/1 - 7(\boldsymbol{g}/1/1) - 7(1/\boldsymbol{g}/1)]$$

On en tire

$$\left[P^4 - 2P^3 - 9P^2 + 18P\right](\boldsymbol{f}/\boldsymbol{g}/\boldsymbol{h}) = 0, \quad \text{soit}$$
$$P^4 - 2P^3 - 9P^2 + 18P = P(P-2)(P-3)(P+3) = 0 \tag{3.7}$$

ce qui conduit bien aux valeurs propres 3,2,0 et -3 pour l'opérateur P. Le projecteur associé à la représentation $[0]$ est

$$Q_0 = \frac{1}{18} P(P-2)(P+3) \tag{3.8}$$

.. et l'on trouve

$$Q_0(\boldsymbol{f}/\boldsymbol{g}/\boldsymbol{h}) = \frac{1}{6}\left[\boldsymbol{f}/\boldsymbol{g}/\boldsymbol{h} - \boldsymbol{g}/\boldsymbol{f}/\boldsymbol{h} + \boldsymbol{g}/\boldsymbol{h}/\boldsymbol{f} - \boldsymbol{h}/\boldsymbol{g}/\boldsymbol{f} - \boldsymbol{f}/\boldsymbol{h}/\boldsymbol{g} + \boldsymbol{h}/\boldsymbol{f}/\boldsymbol{g}\right]$$

soit, pour un tenseur de rang trois quelconque,

$$Q_0(T)|_{ijk} = \frac{1}{6}\left[T_{ijk} - T_{jik} + T_{jki} - T_{kji} - T_{ikj} + T_{kij}\right] \tag{3.9}$$

On vérifie que le tenseur obtenu est complètement antisymétrique suivant ses trois indices. Par conséquent, il est proportionnel au tenseur de Levi-Civita ϵ_{ijk} qui est donc, comme indiqué par la décomposition (3.1), le seul tenseur de rang trois invariant par rotation.

4 Tenseurs de rang quatre

L'espace $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ des tenseurs réels de rang quatre, de dimension 81, est réductible vis-à-vis de $SO(3)$ selon

$$\begin{aligned}
&[1]\otimes[1]\otimes[1]\otimes[1] = [[0]+[1]+[2]]\otimes[[0]+[1]+[2]] \\
&= \{[0]+[1]+[2]\} + \{[1]+[0]+[1]+[2]+[1]+[2]+[3]\} \\
&+ \{[2]+[1]+[2]+[3]+[0]+[1]+[2]+[3]+[4]\}\,, \quad \text{soit} \\
&[1]\otimes[1]\otimes[1]\otimes[1] = \{3[0]\} + \{6[1]\} + \{6[2]\} + \{3[3]\} + [4] \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Cette décomposition se compose donc de 3 représentations scalaires $[0]$, 6 représentations vectorielles $[1]$, 6 représentations $[2]$, 3 représentations $[3]$ et 1 représentation $[4]$. Nous nous limiterons ici à l'identification des trois tenseurs invariants. On a maintenant

$$\begin{aligned}
J_a &= L_a/1/1/1 + 1/L_a/1/1 + 1/1/L_a/1 + 1/1/1/L_a, \quad \text{et} \\
\boldsymbol{J}^2 &= -8 + 2P \quad \text{avec} \\
P &= L_a/L_a/1/1 + L_a/1/L_a/1 + L_a/1/1/L_a + 1/L_a/L_a/1 \qquad (4.2)\\
&\quad +1/L_a/1/L_a + 1/1/L_a/L_a
\end{aligned}$$

Considérons les trois tenseurs

$$A = \boldsymbol{e}_a/\boldsymbol{e}_a/\boldsymbol{e}_b/\boldsymbol{e}_b, \quad B = \boldsymbol{e}_a/\boldsymbol{e}_b/\boldsymbol{e}_a/\boldsymbol{e}_b, \quad C = \boldsymbol{e}_a/\boldsymbol{e}_b/\boldsymbol{e}_b/\boldsymbol{e}_a \tag{4.3}$$

En composantes, cela donne $A_{ijk\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}, \; B_{ijk\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell}, \; C_{ijk\ell} = \delta_{i\ell}\delta_{jk}$. Ils sont manifestement indépendants. On a

$$\begin{aligned}
(L_a/L_a/1/1)(A)|_{ijk\ell} &= \epsilon_{air}(e_b)_r\epsilon_{ajs}(e_b)_s\delta_{k\ell} = 2\delta_{ij}\delta_{k\ell} \\
(L_a/1/L_a/1)(A)|_{ijk\ell} &= \epsilon_{air}(e_b)_r(e_b)_j\epsilon_{aks}(e_c)_s(e_c)_\ell = \delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jk} \\
(L_a/1/1/L_a)(A)|_{ijk\ell} &= \epsilon_{air}(e_b)_r(e_b)_j(e_c)_k\epsilon_{a\ell s}(e_c)_s = \delta_{i\ell}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{j\ell} \\
(1/L_a/L_a/1)(A)|_{ijk\ell} &= (e_b)_i\epsilon_{ajr}(e_b)_r\epsilon_{aks}(e_c)_s(e_c)_\ell = \delta_{jk}\delta_{i\ell} - \delta_{j\ell}\delta_{ik} \\
(1/L_a/1/L_a)(A)|_{ijk\ell} &= \delta_{j\ell}\delta_{ik} - \delta_{jk}\delta_{i\ell} \\
(1/1/L_a\text{Ł}_a)(A)|_{ijk\ell} &= 2\delta_{ij}\delta_{k\ell}
\end{aligned}$$

On trouve donc $P(A) = 4A$: le tenseur A est vecteur propre de P avec la valeur propre 4, ce qui correspond bien à un spin 0 ($\boldsymbol{J}^2 = 0$). On trouve de même $P(B) = 4B$, $P(C) = 4C$. Les trois tenseurs (4.3) sont donc, à des facteurs multiplicatifs près, les seuls tenseurs de rang 4 invariants par rotation. Tout tenseur de rang 4 invariant en est nécessairement une combinaison linéaire.